



HYPATIA (370-415 D. C.) Una excepcional mujer griega, hija del filósofo y matemático Teón. Se hizo célebre por su saber, por su elocuencia y por su belleza. Nacida en Alejandría, viaja a Atenas donde realiza estudios; al regresar a Alejandría funda una

escuela donde enseña las doctrinas de Platón y Aristóteles y se pone al frente del pensamiento neoplatónico. Hypatia es uno de los últimos matemáticos griegos. Se distinguió por los comentarios a las obras de Apolonio y Diofanto. Murió asesinada bárbaramente.

CAPITULO

X

DESCOMPOSICION FACTORIAL

131 FACTORES

Se llama factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

Así, multiplicando a por $a + b$ tenemos:

$$a(a + b) = a^2 + ab$$

a y $a + b$, que multiplicadas entre sí dan como producto $a^2 + ab$, son factores o divisores de $a^2 + ab$.

Del propio modo.

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

luego, $x + 2$ y $x + 3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$.

132 DESCOMPONER EN FACTORES O FACTORAR una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.

133 FACTORAR UN MONOMIO

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b . Por tanto:

$$15a b = 3 \cdot 5 a b.$$

134 FACTORAR UN POLINOMIO

No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que, en Aritmética, hay números primos que sólo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles por ellas mismas y por 1, y que, por tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así $a + b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible por $a + b$ y por 1.

En este capítulo estudiaremos la manera de descomponer polinomios en dos o más factores distintos de 1.

CASO I**CUANDO TODOS LOS TERMINOS DE UN POLINOMIO TIENEN UN FACTOR COMUN****a) Factor común monomio****1. Descomponer en factores $a^2 + 2a$.**

a^2 y $2a$ contienen el factor común a . Escribimos el factor común a como coeficiente de un paréntesis; dentro del paréntesis escribimos los cocientes de dividir $a^2 + 2a = a(a + 2)$. R.
 $a^2 \div a = a$ y $2a \div a = 2$, y tendremos _____

2. Descomponer $10b - 30ab^2$.

Los coeficientes 10 y 30 tienen los factores comunes 2, 5 y 10. Tomamos 10 porque siempre se saca el mayor factor común. De las letras, el único factor común es b porque está en los dos términos de la expresión dada y la tomamos con su menor exponente b .

El factor común es $10b$. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis y dentro ponemos los cocientes de dividir $10b \div 10b = 1$ y $-30ab^2 \div 10b = -3ab$ y tendremos: _____
 $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$. R.

3. Descomponer $10a^2 - 5a + 15a^3$.

El factor común es $5a$. Tendremos:

$$10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2). \quad R.$$

4. Descomponer $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$.

El factor común es $18my^2$. Tendremos:

$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2). \quad R.$$

5. Factorar $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$.

Factor común $3xy^3$.

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3). \quad R.$$

135 PRUEBA GENERAL DE LOS FACTORES

En cualquiera de los diez casos que estudiaremos, la prueba consiste en multiplicar los factores que se obtienen, y su producto tiene que ser igual a la expresión que se factoró.

EJERCICIO 89

Factorar o descomponer en dos factores:

- | | | |
|---------------------------|---|---|
| 1. $a^2+ab.$ | 16. $a^3+a^2+a.$ | 29. $a^6-3a^4+8a^3-4a^2.$ |
| 2. $b+b^2.$ | 17. $4x^2-8x+2.$ | 30. $25x^7-10x^5+15x^3-5x^2.$ |
| 3. $x^2+x.$ | 18. $15y^3+20y^2-5y.$ | 31. $x^{15}-x^{12}+2x^9-3x^6.$ |
| 4. $3a^3-a^2.$ | 19. $a^3-a^2x+ax^2.$ | 32. $9a^2-12ab+15a^3b^2-24ab^3.$ |
| 5. $x^3-4x^4.$ | 20. $2a^2x+2ax^2-3ax.$ | 33. $16x^3y^2-8x^2y-24x^4y^2-40x^2y^3.$ |
| 6. $5m^2+15m^3.$ | 21. $x^3+x^5-x^7.$ | 34. $12m^2n+24m^3n^2-36m^4n^3+48m^5n^4.$ |
| 7. $ab-bc.$ | 22. $14x^2y^2-28x^3+56x^4.$ | 35. $100a^2b^3c-150ab^2c^2+50ab^3c^3-200abc^2.$ |
| 8. $x^2y+x^2z.$ | 23. $34ax^2+51a^2y-68ay^2.$ | 36. $x^5-x^4+x^3-x^2+x.$ |
| 9. $2a^2x+6ax^2.$ | 24. $96-48mn^2+144n^3.$ | 37. $a^2-2a^3+3a^4-4a^5+6a^6.$ |
| 10. $8m^2-12mn.$ | 25. $a^2b^2c^2-a^2c^2x^2+a^2c^2y^2.$ | 38. $3a^2b+6ab-5a^3b^2+8a^2bx+4ab^2m.$ |
| 11. $9a^3x^2-18ax^3.$ | 26. $55m^2n^3x+110m^2n^3x^2-220m^2y^3.$ | 39. $a^{20}-a^{16}+a^{12}-a^8+a^4-a^2.$ |
| 12. $15c^3d^2+60c^2d^3.$ | 27. $93a^3x^2y-62a^2x^3y^2-124a^2x.$ | |
| 13. $35m^2n^3-70m^3.$ | 28. $x-x^2+x^3-x^4.$ | |
| 14. $abc+abc^2.$ | | |
| 15. $24a^2xy^2-36x^2y^4.$ | | |

b) Factor común polinomio**1. Descomponer $x(a+b)+m(a+b)$.**

Los dos términos de esta expresión tienen de factor común el binomio $(a+b)$.

Escribo $(a+b)$ como coeficiente de un paréntesis y dentro del paréntesis escribo los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a+b)$, o sea:

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)} = x \quad \text{y} \quad \frac{m(a+b)}{(a+b)} = m \quad \text{y tendremos:}$$

$$x(a+b)+m(a+b)=(a+b)(x+m). \quad \text{R.}$$

2. Descomponer $2x(a-1)-y(a-1)$.

Factor común $(a-1)$. Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a-1)$, tenemos:

$$\frac{2x(a-1)}{(a-1)} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{-y(a-1)}{(a-1)} = -y.$$

$$\text{Tendremos: } 2x(a-1)-y(a-1)=(a-1)(2x-y). \quad \text{R.}$$

3. Descomponer $m(x+2) + x + 2$.

Esta expresión podemos escribirla: $m(x+2) + (x+2) = m(x+2) + 1(x+2)$.

Factor común $(x+2)$. Tendremos:

$$m(x+2) + 1(x+2) = (x+2)(m+1). \quad R.$$

4. Descomponer $a(x+1) - x - 1$.

Introduciendo los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo $-$ se tiene:

$$a(x+1) - x - 1 = a(x+1) - (x+1) = a(x+1) - 1(x+1) = (x+1)(a-1). \quad R.$$

5. Factorar $2x(x+y+z) - x - y - z$.

Tendremos:

$$2x(x+y+z) - x - y - z = 2x(x+y+z) - (x+y+z) = (x+y+z)(2x-1). \quad R.$$

6. Factorar $(x-a)(y+2) + b(y+2)$.

Factor común $(y+2)$. Dividiendo los dos términos de la expresión dada entre $(y+2)$ tenemos:

$$\frac{(x-a)(y+2)}{(y+2)} = x-a \quad y \quad \frac{b(y+2)}{(y+2)} = b; \text{ luego:}$$

$$(x-a)(y+2) + b(y+2) = (y+2)(x-a+b). \quad R.$$

7. Descomponer $(x+2)(x-1) - (x-1)(x-3)$.

Dividiendo entre el factor común $(x-1)$ tenemos:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = (x+2) \quad y \quad \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)} = -(x-3).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} (x+2)(x-1) - (x-1)(x-3) &= (x-1)[(x+2) - (x-3)] \\ &= (x-1)(x+2-x+3) = (x-1)(5) = 5(x-1). \quad R. \end{aligned}$$

8. Factorar $x(a-1) + y(a-1) - a + 1$.

$$x(a-1) + y(a-1) - a + 1 = x(a-1) + y(a-1) - (a-1) = (a-1)(x+y-1). \quad R.$$

EJERCICIO 90

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $a(x+1)+b(x+1).$

2. $x(a+1)-3(a+1).$

3. $2(x-1)+y(x-1).$

4. $m(a-b)+(a-b)n.$

5. $2x(n-1)-3y(n-1).$

6. $a(n+2)+n+2.$

7. $x(a+1)-a-1.$

8. $a^2+1-b(a^2+1).$

9. $3x(x-2)-2y(x-2).$

10. $1-x+2a(1-x).$

11. $4x(m-n)+n-m.$

12. $-m-n+x(m+n).$

13. $a^3(a-b+1)-b^2(a-b+1).$

14. $4m(a^2+x-1)+3n(x-1+a^2).$

15. $x(2a+b+c)-2a-b-c.$

16. $(x+y)(n+1)-3(n+1).$

17. $(x+1)(x-2)+3y(x-2).$

18. $(a+3)(a+1)-4(a+1).$